DS — Probabilités et Statistiques

Thème : Mesure expérimentale en chimie industrielle

Contexte : Un réacteur produit un soluté par la réaction A $\to$ B. Le laboratoire analyse la variabilité du procédé : **réactions moléculaires** à petite échelle, **impuretés rares**, **rendement global** sur un très grand nombre de molécules et **mesures spectrophotométriques** bruitées. Ces phénomènes relèvent de modèles probabilistes différents (**binomiale**, **Poisson**, **normale**) utilisés pour évaluer la **stabilité**, la **qualité** et la **fiabilité** du procédé.

Exercice 1 — Sélection des échantillons

Dans un lot de 50 flacons produits par une unité de synthèse, le laboratoire doit prélever chaque matin **8 flacons** pour le contrôle qualité.

1) Combien de groupes différents de 8 flacons peut-on constituer ?
2) Si 5 flacons du lot total sont suspects, combien de prélèvements contiendraient exactement **2 flacons suspects** ?
3) Quelle est la probabilité, en tirant 8 flacons au hasard, d'obtenir **au moins un** flacon suspect ?

Exercice 2 — Réaction moléculaire

À l'échelle microscopique, chaque molécule de A a une probabilité $p = 0{,}72$ de se transformer en B lors d'une collision efficace. On observe un petit échantillon de $n = 20$ molécules.

1) Calculer la probabilité d'obtenir exactement $k = 15$ transformations.
2) Calculer la probabilité d'obtenir **au moins 18** réactions.
3) Donner l'espérance et la variance du nombre de réactions.
4) Interpréter physiquement la stabilité (ou non) du rendement à cette échelle.

Exercice 3 — Impuretés rares dans la cuve

Un phénomène rare est suivi : l'apparition de **micro-impuretés C** issues de collisions parasites. Dans une portion standard de mélange, on observe en moyenne $\lambda = 14$ impuretés.

1) Justifier l'utilisation d'une loi de Poisson pour ce phénomène.
2) Calculer $P(X = 14)$.
3) Calculer la probabilité d'en observer **au plus 3**.

4) Sur 100 portions identiques, combien devraient en contenir **entre 13 et 15** ?

Exercice 4 — Réaction principale A → B

La réaction principale A→B est très efficace : $p \approx 0{,}72$, et le nombre total de molécules dans une portion est gigantesque ($n \approx 10^{11}$). Le nombre de réactions suit donc, par approximation normale : $X \approx \mathcal{N}(np,\ np(1-p))$. On donne : $\mu = 7{,}2 \times 10^{10}$, $\sigma = 1{,}4 \times 10^{5}$.

1) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser un modèle de Poisson ici.
2) Justifier l'approximation normale à partir de la loi binomiale.
3) Calculer la probabilité que : $X \in [\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma]$.
4) Interpréter physiquement ce résultat en termes de stabilité du procédé industriel.

Exercice 5 — Mesure spectrophotométrique

Le spectrophotomètre mesure la concentration en produit B. Les variations proviennent du bruit thermique, électronique, photonique et optique. $X \sim \mathcal{N}(0{,}84\ ;\ 0{,}05^2)$.

1) Probabilité qu'une mesure soit hors tolérance [0,80 ; 0,90].
2) Proportion des mesures dans $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.
3) Concentration correspondant au **90e percentile**.
4) Déterminer l'intervalle symétrique autour de μ contenant 95 % des mesures.
5) Expliquer physiquement pourquoi les mesures suivent une loi normale.

Exercice 6 — Incertitudes de mesure (Loi normale)

On calibre un spectrophotomètre destiné à mesurer la concentration en produit B. Sur une solution de référence, un grand nombre de mesures X (en $\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$) est réalisé, et l'on admet :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

On sait que 2,5 % des mesures sont inférieures à 0,78 et que 5 % sont supérieures à 0,90.

1) Déterminer μ et σ.
2) Pour l'intervalle de conformité [0,80 ; 0,90], calculer la probabilité qu'une mesure soit **non conforme**.
3) En réalisant $m = 9$ mesures indépendantes, on considère la moyenne : $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$. Donner la loi de $\overline{X}$ (moyenne, écart-type).
4) Déterminer l'intervalle symétrique $[\overline{x} - U\,;\, \overline{x} + U]$ contenant 99 % des valeurs possibles de $\overline{X}$ (**incertitude élargie**).
5) Interpréter : distinguer **biais** (lié à μ) et **incertitude aléatoire** (liée à σ).